Bir matrisin İzi! $A=[a_{ij}]_{n\times n} \in \mathcal{F}^n_n$ kare matrisi verilsin. A nın köşegen elemanlarının toplamına A nın izi denir. iz A ile gösterilir.

$$\text{iz}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\text{iz}A=-1+3+8=10$

Özellikleri!

1) $A,B \in K^n_n$ için $\text{iz}(A+B)=\text{iz}A+\text{iz}B$
2) $\text{iz}(kA)=k\,\text{iz}A$, $k\in\mathcal{F}$
3) $\text{iz}(A^t)=\text{iz}A$
4) $\text{iz}(AB)=\text{iz}(BA)$

İspat : 4) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ $\quad$ $B=[b_{jk}]_{n\times n}$

$$AB=\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]=[c_{ik}]_{n\times n}$$

$$BA=\left[\sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{kt}\right]=[d_{jt}]_{n\times n}$$

$$\text{iz}AB=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} d_{jj}=\text{iz}BA$$

Tanım: $A=[a_{ij}]\in\mathcal{F}^m_n$ matrisinde s-tane satırın r-tane sütunun atılmasıyla elde edilen $(m-s)\times(n-r)$ tipindeki matrise A nın alt matrisi denir. Eğer A matrisi alt matrislerle ifade edilebiliyorsa A ya kısımlara ayrılmış yada parçalanmış matris denir. Parçalanmış matrisler matris çarpımı işleminde kolaylık sağlar.

Örnek:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]_{4\times 5}$$

$$B=\left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ \hline b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{array}\right]_{5\times 4}$$

A ve B yi alt matrislere ayırarak AB matrisini hesaplayınız.

Çözüm:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} \end{bmatrix}$$

Bazı Özel Matrisler

1) $A=[a_{ij}]_{n\times n}\in \mathcal{F}^n_n$ kare matrisi verilsin.

A nın köşegeninin altındaki a_{ij} elemanları için $a_{ij}=0$ ise A ya üst üçgensel matris denir. Yani $i>j$ için $a_{ij}=0$ ise A üst üçgensel matristir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

2) $i<j$ için $a_{ij}=0$ ise A ya alt üçgensel matris denir.

3) Alt ve üst üçgen matrislere kısaca üçgen matris denir.

4) A üçgen matrisi için $a_{ii}=0$ ise A ya tam üçgen matris denir.

5) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde asal köşegen üz. deki elemanların dışında, diğer elemanları sıfır ise bu matrislere köşegen matrisler denir. (Diagonal)

6) A diagonal matrisi için $a_{11}=a_{22}=\dots a_{nn}=k$ ise A ya skalar matris denir.

$$A=\begin{bmatrix} k & & 0 \\ & k & \\ 0 & & \ddots k \end{bmatrix}$$

7) $A^2=A$ ise A ya idempotent matris denir.

8) $A^{p+1}=A$ ise A ya periyodik matris denir. Bu koşulu sağlayan en küçük p pozitif tamsayısına da A nın periyodu adı verilir.

9) $A^p=0$ ise A ya nilpotent matris, bu koşulu sağlayan P pozitif tamsayısına da A nın nilpotentlik derecesi denir.

10) A^{-1} var ve $A^{-1}=A$ ise A ya involutif matris denir.

A involutif matrisi için $A.A=I_n$ dir.

11) A ve B kare matrisleri için $AB=BA$ ise A ve B ye değişmeli matrisler, $AB=-BA$ ise A ve B ye ters değişmeli matrisler denir.

12) $A^t = A$ ise A ya simetrik matris, $A^t = -A$ ise A ya ters simetrik (anti-simetrik) matris denir.

13) $(\bar{A})^t = A$ ise A ya Hermit matris, $(\bar{A})^t = -A$ ise A ya ters Hermit (anti hermit) matris denir.

14) A^{-1} var ve $A^{-1} = A^t$ ise A ya ortogonal matris denir.

$$AA^t = A^tA = I_n \text{ dir.}$$

Teorem: Her kare matris biri simetrik, diğeri anti simetrik iki matrisin toplamı olarak yazılabilir.

İspat:

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t), \quad K = \frac{1}{2}(A - A^t) \text{ alınırsa}$$

$A = S + K$ dır. Burada S simetrik K anti simetrik matrislerdir, gerçekten;

$$S^t = \left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = S \Rightarrow S \text{ simetrik}$$

$$K^t = \left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -K \Rightarrow K \text{ anti sim}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini biri simetrik diğeri anti simetrik iki matrisin toplamı olarak yazınız.

$$S = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = S + K = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$, $B=[b_1\ b_2 \dots b_n]_{1\times n}$ AB, BA, A^tB^t B^tA^t hesapla

Çözüm: $AB=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1\ b_2 \dots b_n]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}_{n\times n}$

$(A^tB^t)=(BA)^t$ $(B^tA^t)=(AB)^t$ dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ matrisinin idempotent matris olduğunu gösteriniz

$A^2=A$ ise A idempotent.

Örnek: a) $A=\begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin ters hermit matris

b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin hermit matris old. göst.

a) A ters hermit $\Rightarrow (\overline{A})^t=-A$ dır.

B hermit matris $\Rightarrow (\overline{B})^t=B$ dir.

Örnek: Bir ters hermit matrisinin köşegen elemanlarının sıfır yada sanal sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(\overline{A})^t=-A$ $A=[a_{ij}]$ olsun.

$[\overline{a_{ji}}]=-[a_{ij}]$

$[\overline{a_{ji}}]=[-a_{ij}]$ $\Rightarrow \overline{a_{ji}}=-a_{ij}$

A nın köşegen elemanları için $i=j$ dir.

$\overline{a_{ii}} = -a_{ii} \Rightarrow \overline{a_{ii}} + a_{ii} = 0$

// $z = a + ib$ olsun. $\bar{z} = a - ib$ olur. //

$\bar{z} + z = 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = ib$ (b sıfır olabilir)

$a_{ii} = 0$ veya a_{ii} sanaldır

Örnek: Bir hermit matrisinin köşegen elemanlarının reel sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ hermit matris olsun.

$(\bar{A})^t = A \qquad [\overline{a_{ji}}] = [a_{ij}]$

$\Rightarrow \overline{a_{ji}} = a_{ij}$ A nın köşegen elemanları için $i=j$ dir.

$\overline{a_{ii}} = a_{ii} \Rightarrow \overline{a_{ii}} - a_{ii} = 0$

// $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib \Rightarrow \bar{z} - z = 0 \quad -2ib = 0 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow z = a$ a_{ii} reel sayıdır.

Örnek: Eğer A ve B değişmeli ise A^{-1} ve B^{-1}, A^t ve B^t, $\bar{A}^t$ ve $\bar{B}^t$ de değişmelidir, gösteriniz.

Çözüm: A ve B değişmeli ise $AB = BA$

A^{-1} ve B^{-1} de değişme old. göstermek için

$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olduğunu göstermeliyiz.

$AB = BA \Rightarrow (AB)^{-1} = (BA)^{-1}$ matris çarpımı inversi tanım

$B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

olur ki A^{-1} ve B^{-1} değişmelidir.

$AB = BA \Rightarrow (AB)^t = (BA)^t$

$B^tA^t = A^tB^t$

$AB = BA \rightarrow (AB)^t = (BA)^t$

$B^tA^t = A^tB^t$

$\overline{B^tA^t} = \overline{A^tB^t} \Rightarrow \overline{B^t}\,\overline{A^t} = \overline{A^t}.\overline{B^t}$

$\Rightarrow A^t$ ile B^t değişmelidir.

Örnek: Eğer A n-kare matrisi ve A^{-1} varsa $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

$(\overline{A})^{-1} = (\overline{A^{-1}})$, $(\overline{A^t})^{-1} = (\overline{A^{-1}})^t$ olduğunu gösteriniz

Çözüm:

A nın tersi var ise $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ dir.

Eşitliğin her iki yanının transpozu alınırsa

$* \quad (AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = (I_n)^t$

$(A^{-1})^t A^t = A^t.(A^{-1})^t = I_n$ invers matris tanımı

$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ dir.

$* \quad \overline{AA^{-1}} = \overline{A^{-1}A} = \overline{I_n}$

$\overline{A}\,\overline{A^{-1}} = \overline{A^{-1}}\,\overline{A} = I_n$ invers tanımı

$(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$ dir.

$* \quad (\overline{A^t})^{-1} \stackrel{?}{=} (\overline{A}^{-1})^t$

$(\overline{A^t})^{-1} \underset{2den}{=} \overline{(A^t)^{-1}} \underset{1den}{=} \overline{(A^{-1})^t} \underset{2den}{=} (\overline{A^{-1}})^t$

Örnek: A ve B ters simetrik kare matrisler olsunlar

AB simetriktir $\Leftrightarrow$ A ve B değişmelidir.

Çözüm: A ve B ters simetrik matris ise

$A^t = -A$ ve $B^t = -B$ dir.

AB simetrik olsun. A ve B değişmeli, yani $AB = BA$

AB simetrik ise $(AB)^t = AB$

$B^t A^t = AB$

$(-B)(-A) = AB \Rightarrow AB = BA \Rightarrow$ A ve B değişmeli

$\Leftarrow$) A ve B değişmeli olsun. AB nin simetrik yani

$(AB)^t = AB$ old. gösterelim.

$AB = BA \Rightarrow (AB)^t = (BA)^t = A^t B^t = (-A)(-B) = AB$

$\Rightarrow (AB)^t = AB$ olup AB simetriktir.

Örnek: A ve B kare matrisleri için $AB = A$ ve $BA = B$ olsun

a) $B^t A^t = A^t$ ve $A^t B^t = B^t$ olduğunu

b) A^t, B^t matrislerinin idempotent olduğunu

c) A ve B nin tersi varsa, $A = B = I_n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $AB = A \Rightarrow (AB)^t = A^t \Rightarrow B^t A^t = A^t$

$BA = B \Rightarrow (BA)^t = B^t \Rightarrow A^t B^t = B^t$

b) $A^t . A^t = A^t$?

$A^t A^t = (B^t A^t)(B^t A^t)$

$= ((B^t A^t) B^t) A^t = B^t (A^t B^t) A^t = B^t B^t A^t$

$= B^t A^t$

$= A^t$

c) A^{-1} var olsun. $AB=A$ olduğundan

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}.A$$
$$(A^{-1}A)B=A^{-1}A=I_n$$
$$B=I_n$$

$BA=B$ dan

$$B^{-1}(BA)=(B^{-1}B)$$
$$(B^{-1}B)A=I_n$$
$$A=I_n$$

Örnek!

$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix}$ matrisinin involutif matris olması için k ne olmalıdır?

$A^{-1}=A$ veya $AA=I_3$ olmalı.

$$AA=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9+3k \\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$9+3k=0 \quad 3k=-9 \quad \boxed{k=-3}$

Örnek!

$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ matrisi $A^2=0$ olduğundan 2. dereceden Nilpotent matristir.

Örnek! Nilpotent matrislerin tersinin olmadığını göster.

A, Nilpotentlik derecesi p olan bir nilpotent matris olsun. $A^p=0$ dır.

Kabul edelim ki A nın tersi var olsun.

$A^p=0$ dan $\quad A^p.A^{-1}=0.A^{-1}=0 \quad \Rightarrow A^{p-1}=0$

Bu ise p nin nilpotentlik derecesi ile çelişir. O halde A nın tersi yoktur.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal matris old. göst.

Çözüm: $A^t = A^{-1}$ olmalı.

$A.A^t = A^t.A = I_3$ olmalı.

Örnek: A ve B ortogonal matrisler için AB nin de ortogonal matris olduğunu gösteriniz.

A ve B ortogonal ise $A^t = A^{-1}$, $B^t = B^{-1}$

$$(AB)^t = B^t A^t = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

Örnek: A simetrik, B ortogonal matrisleri için $B^{-1}AB$ nin simetrik matris olduğunu gösteriniz.

A simetrik $A^t = A$

B ortogonal $B^t = B^{-1}$

$$(B^{-1}AB)^t = B^t A^t (B^{-1})^t = B^{-1}AB \quad , (B^{-1})^t = (B^t)^t = B$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile değişmeli olan bütün 2x2 tipindeki matrisleri bulunuz.

$B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ $\quad AB = BA$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{bmatrix}$$

$x = x+z \Rightarrow z = 0$

$y+t = x+y \Rightarrow t = x$

$t = z+t$

$$B=\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

Örnek: $\mathbb{R}^n_n$ cümlesinin $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz. $n\times n$ tipinde reel bileşeni ~~köşegen~~ matrislerin kümesi K olsun.

a) K nın $\mathbb{R}^n_n$ uzayının alt uzayı old. göst.

b) K uzayının bazını ve boyutunu bulunuz.

$$K = \{ A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ ve } i \neq j \text{ için } a_{ij} = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n \right\}$$

Çözüm;

a) $K \neq \emptyset$ dır. $\exists I_n \in K$ dır. $K \in \mathbb{R}^n_n$ açık.

$\forall A, B \in K$ için $A+B \overset{?}{\in} K$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in K$ $\lambda A \in K$?

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \ a_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \\ & \ddots & b_n \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & & \\ & a_2+b_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \ a_n+b_n \end{bmatrix} \in K$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & & \\ & \lambda a_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \ \lambda a_n \end{bmatrix} \in K \text{ dır.}$$

b) Bir vektör uzayının boyutu uzayı geren vektörler içerisinden maksimum sayıda lineer bağımsız olanların sayısına eşittir. Bu maksimum sayıdaki lineer bağımsız cümle uzay için bazdır. O halde K uzayını geren vektörleri bulalım.

$\forall A \in K$ alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \; a_n \end{bmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_1} + a_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_2} + \cdots$$

$$+ \cdots + a_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_3}$$

$K = Sp\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$

$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ lineer bağımsızdır. $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ K için bazdır. Boy $K = n$ dir.

Örnek: $\mathbb{C}_n^n$ cümlesinin $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz. $n \times n$ tipinde kompleks bileşenli köşegen matrislerin cümlesi K olsun.

a) K nın $\mathbb{C}_n^n$ nin alt uzayı olduğunu gösteriniz.

b) K uzayının bazını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm: $K \neq \emptyset$, $\exists I_n \in K$ dır. $K \subset \mathbb{C}_n^n$ olduğu açık.

$\forall A, B \in K$ $A + B \in K$?

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \; a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ 0 & & \ddots \; b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & & 0 \\ & a_2+b_2 & \\ 0 & & \ddots \; a_n+b_n \end{bmatrix} \in K$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall A \in K$ $\lambda A \in K$?

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \; a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & & \\ & \lambda a_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \; \lambda a_n \end{bmatrix} \in K$$

$K \subseteq \mathbb{C}_n^n$ alt uzaydır.

b) $K = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{C} \;,\; 1 \le i \le n \right\}$

$\forall A \in K$ alalım

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+iy_1 & & & \\ & x_2+iy_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n+iy_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}}^{\varepsilon_1} + \dots + x_n \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}^{\varepsilon_n}$$

$$+ y_1 \underbrace{\begin{bmatrix} i & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon_{n+1}} + \dots + y_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i \end{bmatrix}}_{\varepsilon_{n+n}}$$

$K = Sp\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{n+n}\}$

lineer bağımsızdır. $a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n+1} + \dots + b_n\varepsilon_{n+n} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_1+ib_1 & & & \\ & a_2+ib_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_n+ib_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad a_i = b_i = 0 \; ? \quad 1 \le i \le n \; ?$$

$a_i + b_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad b_i = 0$

boy $K = 2n$ dir.